Fiche d'exercices 15 - Probabilité - SP 1

1 Exercices de base

Exercice 1 : Les tableaux suivants décrivent-ils une loi de probabilité ? Si non, pourquoi ?

Evénements	1	2	3	4	5
Probabilité	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Evénements	bleu	rouge	vert	nuage	voiture
Probabilité	$0,4$	$0,25$	$0,3$	$0,15$	$-0,1$

Exercice 2 : Vrai/Faux

1. On lance deux dés équilibrés à six faces et on additionne les deux résultats. L'événement *"obtenir un nombre supérieur à 10"* est un événement impossible.
2. On lance un dé à six faces. L'événement contraire de l'événement *"Obtenir un nombre premier"* est l'événement $\{1;4;6\}$.
3. On lance un dé à 6 faces. L'événement *"Obtenir moins que 8"* est un événement certain.
4. A la cantine du lycée, les élèves ont le choix entre deux entrées notées E_1 et E_2, deux plats P_1 et P_2 et trois desserts D_1, D_2 et D_3. Un élève prend au hasard une entrée, un plat et un désert. L'univers associé à cette expérience aléatoire comporte 2+2+3=7 issues.

Exercice 3 : Les énoncés suivants sont légèrement faux. Les corriger.

1. Pour tout événement A, $0 < p(A) < 1$
2. Si l'univers lié à une expérience aléatoire est noté Ω, $p(\Omega) = 0$.
3. Dans une situation d'équiprobabilité, tous les événements ont la même probabilité.
4. La somme des probabilités de tous les événements d'une expérience aléatoire est toujours égale à 1.

Exercice 4 : Vrai/Faux
On tire au hasard un nombre entre 1 et 100. On considère les événements suivants :

— A : *"l'entier est un nombre pair"*

— B : *"l'entier est un multiple de 5"*

— C : *"l'entier est un diviseur de 100"*

— D : *"l'entier est strictement supérieur à 50"*

1. L'événement $A \cap B$ est constitué de 10 issues.
2. B et C sont incompatibles.
3. L'événement C est plus probable que l'événement $A \cap B$.
4. C et D sont incompatibles.

Exercice 5 : Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. On considère alors les événements A :"Tirer un cœur" , B :"Tirer un dix" , et C :"Tirer une figure (valet, dame, roi)"

1. Décrire les événements : $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$
2. Donner les probabilités P(A), P(B), P($A \cap B$), P($A \cup B$), $P(B \cap C)$.
3. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Même question avec B et C.

Exercice 6 : Soient A et B deux événements tels que p(A)=0,3 p(B)=0,5 et $P(A \cup B) = 0,8$. Les deux événements sont-ils incompatibles ?

2 Calcul de probabilités

Exercice 7 : On a demandé à 150 élèves de Seconde combien de SMS ils envoient en moyenne par jour. On a résumé leurs réponses dans le tableau suivant en distinguant les réponses des garçons et des filles.

Nombre de SMS	0	5	10	30	50	80
Garçons	4	12	20	18	14	2
Filles	8	15	22	25	4	6

On rencontre un élève au hasard parmi les cent cinquante. On considère les événements suivants :

— F : *"l'élève est une fille"*

— A : *"l'élève envoie en moyenne 10 SMS par jours"*

— B : *"l'élève envoie en moyenne 80 SMS par jour"*

1. Déterminer p(F), $p(F \cap A)$.
2. Calculer $p(\bar{F} \cap B)$, et donner le résultat par une phrase en français sans symboles mathématiques.
3. Calculer $p(A \cup B)$ et $p(F \cup A)$.

Exercice 8 : Je souhaite visiter trois villes italiennes : Florence, Rome, Naples. La visite des trois villes se fait dans n'importe quel ordre, et je choisis de faire mon circuit en prenant au hasard l'ordre des villes.

1. A l'aide d'un arbre, déterminer tous les circuits possibles.
2. Quel est le nombre d'issues de l'univers lié à cette expérience aléatoire ?
3. Calculer la probabilité des deux événements suivants :

   — A : *"Le circuit commence par Florence"*

   — B : *"le circuit passe par Rome*
4. J'affirme que j'ai autant de chances de commencer par Rome que de terminer par Florence. Ai-je raison ? (Oui parce que je suis le prof, mais justifiez-le).

Exercice 9 : En informatique, un octet est une suite de huit chiffres tous égaux à 0 ou à 1. Par exemple, 00110101 et 10101010 sont deux octets.

1. Combien d'octets différents peut-on former ?
2. On écrit au hasard un octet. Calculer la probabilité des événements suivants :

   — A : *"Les deux premiers chiffres sont égaux à 1"*

   — B : *"Le dernier chiffre est égal à 0"*
3. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
4. En déduire la probabilité de l'événement $A \cup B$.

Exercice 10 : Dans une classe de 36 élèves, 18 sont intéressés par les maths et 12 par le français. 6 élèves ne sont intéressés ni par les maths ni par le français. On prend au hasard un élève de la classe. On appelle A l'événement *"l'élève s'intéresse aux maths"* et B l'événement *"l'élève s'intéresse au français.*

Effectifs	A	$\bar{A}$	Total
B			
$\bar{B}$			
Total			

1. Traduire l'énoncé en complétant le tableau.
2. Déterminer la probabilité que l'élève s'intéresse :
   — A au moins l'une des deux matière
   — Aux deux matières.

Exercice 11 : Le tableau suivant dénombre les étudiants issus de différents baccalauréats suivant leur sexe (F ou G). On note S ceux ayant un bac scientifique.

	S	$\bar{S}$	Total
F	78	147	225
G	102	75	
Total	180		

1. Décrire l'événement $F \cap G$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.
2. Décrire l'événement $\bar{S}$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.
3. Décrire l'événement $F \cup S$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.
4. Décrire l'événement $F \cup G$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.

Exercice 12 : Dans la salle des professeurs, il y a deux photocopieurs. On note A et B les événements suivants :

— A : *"Le premier photocopieur fonctionne"*

— B : *"Le deuxième photocopieur fonctionne"*

Durant les années précédentes, on donne le nombre de panne pour les deux photocopieurs.

	Photocopieur 1	Photocopieur 2
Nombre d'utilisations	1500	500
Nombre de pannes	300	50

1. Grâce au tableau, estimer p(A) et p(B).
2. Décrire les événements suivants à l'aide des événements A et B.
   — E : *"Les deux photocopieur fonctionnent"*
   — F : *"Au moins un des deux photocopieur fonctionne"*
3. Quels sont les événements contraires de E et de F ? Les décrire à l'aide de A et B.
4. On suppose en plus qu'il y a toujours au moins un des deux photocopieur qui fonctionne. En déduire p(F) et $p(\bar{F})$, puis calculer p(E).

Exercice 13 : Pour organiser l'oral blanc de français, les professeurs ont demandé l'aide des collègue de maths afin d'établir les horaires de passage des candidats. Ceux-ci proposent aux candidats de tirer trois feuilles, dans trois urnes différentes.

— La première urne contient 3 feuilles, sur lesquels sont marqué trois lettres "A", "B", ou "C".

— La deuxième urne contient deux feuilles où sont inscrits "6" ou "7"

— La troisième urne contient deux feuilles où sont inscrits "Matin" ou "Après-midi".

Ainsi, si l'élève tire successivement (A ;7 ;Après-midi), cela signifie qu'il passera son oral le 7 Mars après-midi, avec le sujet A.

1. Décrire la situation à l'aide d'un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ? Est-on en situation d'équiprobabilité ?
3. Quelle est la probabilité qu'un élève passe le matin ?
4. Quelle est la probabilité que l'élève passe le 6 mars ?
5. Quelle est la probabilité que l'élève passe le matin avec le sujet B ?

Exercice 14 : Au prochain devoir d'histoire géographie, les élèves devront choisir entre un sujet d'histoire et un de géographie. La moitié des élèves maîtrisent le sujet d'histoire, et les deux tiers maîtrisent le sujet de géographie. Seul un quart des élèves maîtrisent les deux sujets.

Il y a 36 élèves dans la classe. Combien de copies d'histoire le professeur va-t-il corriger ?

3 Exercices d'approfondissement

Exercice 15 : Une urne contient n boules noires, 10 boules rouges et 20 boules blanches. On prélève une boule au hasard de l'urne et on note sa couleur. Toutes les boules ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

— N : *"La boule prélevée est noire"*

— R : *"La boule prélevée est rouge"*

— B *"La boule prélevée est blanche"*

1. Dans cette question, on suppose que n=40. Calculer p(N), p(R) et p(B).
   Dans la suite, la lettre n désigne un entier naturel quelconque.
2. Exprimer en fonction de n les probabilités p(N), p(R) et p(B).

3. Calculer n pour que p(N)=1/3.
4. Est-il possible d'avoir $p(N) \geq 0,99$? Si non, pourquoi ? Si oui, pour quelles valeurs de n ?
5. On prélève maintenant deux boules de l'urne en remettant dans l'urne la première boule avant de prélever la deuxième. On note M l'événement *"les deux boules sont noires"*.
   a) Quel est, en fonction de n, le nombre d'issues de cette nouvelle expérience aléatoire ?
   b) Exprimer p(M) en fonction de n.
   c) Combien de boules noires faut-il au moins dans l'urne pour que l'on ait $p(M) \geq \frac{1}{2}$?

Exercice 16 : Dans une station de sport d'hiver, un perchiste remarque qu'un tiers des personnes font du snowboard et le reste du ski. Les trois quarts des snowboarders ont moins de 20 ans, alors que la moitié des personnes ont plus de 20 ans.

Quelle est la probabilité que la prochaine personne qui se présente au télésiège soit un skieur de moins de 20 ans ?

Exercice 17 : En Ecosse, il y a du brouillard 200 jours par an et il pleut 200 jours par an. Pourtant, il n'y a ni brouillard ni pluie pendant 45 jours par an. Combien de jour par an a-t-on dans la même journée brouillard et pluie ?

Exercice 18 : Sur une cible circulaire, le disque central qui correspond à la zone 10, a pour rayon 5cm. Pour chacune des autres zones concentriques, on augment à chaque fois le rayon de 5cm, et on les numérote par ordre décroissant. Le disque complet a donc pour rayon 30cm.

Un joueur lance une fléchette sur la cible et atteint une zone. On suppose que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. Faire un schéma.
2. Montrer que l'aire de la zone 9 est égale à 75π cm^2.
3. Préciser quel univers à 6 issues permet de décrire cette expérience aléatoire, et déterminer la loi de probabilité qui la modélise.

Exercice 19 : On considère l'expérience aléatoire suivante : *On lance successivement deux dés. On note M(x ;y) le point obtenu, dont l'abscisse est le résultat du lancé du premier dé, et l'ordonnée l'abscisse du lancé du deuxième dé.*

On réalise deux fois cette expérience, ce qui nous donne deux points aléatoires A et B.

1. Quelle est la probabilité que A et B aient la même abscisses ?
2. En déduire la probabilité que $\overrightarrow{AB}$ soit colinéaire au vecteur $\binom{2}{0}$.
3. Quelle est la probabilité que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit colinéaire au vecteur $\binom{1}{1}$?
4. Quelle est la probabilité que la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaille 1 ?
5. Soit E l'événement : *"$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$ a pour coordonnées $\binom{2}{0}$"*. Calculer p(E).
6. Soit F l'événement : *"$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$ a pour coordonnées $\binom{2}{1}$"*. Calculer p(F).

Exercice 20 : Les secours sont mobilisés pour secourir un individu en mer. On note $M(x(t); y(t))$ sa position à l'instant t. L'instant initial est le moment où les secours sont prévenus, et on choisit l'origine du repère comme étant la position de la personne disparue à t=0.

Dans un premier temps, on suppose qu'il n'y a pas de courant marin. La personne flotte donc dans l'eau, mais dérive de manière aléatoire. Toutes les minutes, la personne est déplacé au hasard d'1 m en direction du Nord, du Sud, de l'Est ou de l'Ouest.

1. Quelles sont les positions possibles de la personne après 10 minutes ?
2. Dans quelle zones les secouristes doivent-ils concentrer leur efforts après 10 minutes ?

On suppose maintenant qu'il y ait un courant marin vers le Sud. La personne disparue flotte donc dans l'eau, mais a tendance à plus dériver vers le Sud. Chaque minute s'écoulant, la personne dérive d'un mètre, et sa direction est donné par le tableau suivant :

Direction	Nord	Sud	Est	Ouest
Probabilité	0	0,6	0,2	

1. Complétez le tableau, et commentez.
2. Quelles sont les positions possibles de la personne après 3 min ? Calculer l'aire totale de la zone de recherche.
3. Quelle est la probabilité que la personne soit, après 3 minute, au point N(-3 ;0) ? Au point P(0 ;-3) ?
4. La zone a rechercher étant trop grande, les secouristes décident de limiter leur recherche à une zone formé par le rectangle de sommet A(-1 ;-3), B(1 ;-3), C(1 ;-2) et D(-1 ;-2). Le chef des secouriste déclare à la famille qu'ils ont plus de 90% de chance de retrouver la personne dans ce rectangle. A-t-il raison ?

Exercice 21 : En NFL (football américain), il existe deux conférences : NFC et AFC. Depuis 1967, chaque année à la fin de saison (février), les meilleures équipes de chaque conférence s'affrontent, dans un match que l'on appelle Super bowl. L'arbitre lance une pièce (non truquée) au début du match, pour déterminer la position sur le terrain des équipes. De 1998 à 2011, c'est l'équipe de la NFC qui remporte le tirage au sort.

1. Calculer le nombre de Super bowl disputés entre 1967 et 2017.
2. Calculer le nombre de victoires d'affilées d'une équipe de la NFC au tirage au sort.
3. Cela vous paraît-il probable que la NFC gagne le tirage au sort autant de fois d'affilée ?
4. On admet (cf DM de proba des vacances de Noël pour un début de preuve) qu'en moyenne, pour avoir n victoires consécutives à Pile ou Face, il faut attendre $T_n = 2^{n+1} - 2$ lancers de pièce. Commentez.