Fiche d'exo 8 - Repérage & vecteurs

18 octobre

Exercice On considère l'algorithme suivant :

Input A, B
A+B → A
A-B → B
A-B → A
Disp A,B

Questions :
1) Traduire l'algorithme en langue naturelle.
2) Que fait cet algorithme pour des valeurs initiales A=1 et B=3 ?
3) De manière générale, que fait cet algorithme ? Comparer avec un algorithme similaire donné en exemple en cours.

Proof. Corrigé en TD.

1) En français, cela donne :
Initialisation (Entrée) : Saisir A,B
Calcul 1 : A prend la valeur A+B
Calcul 2 : B prend la valeur A-B
Calcul 3 : A prend la valeur A-B
Sortie : Afficher A,B

2)

Étape	Valeur de A	Valeur de B
Initialisation	1	3
Calcul 1	1+3 = 4	3
Calcul 2	4	4-3 = 1
Calcul 3	4-1 = 3	1
Sortie	3	1

On remarque que l'algorithme échange les valeurs de A et B.

3) On a donné en cours un algorithme qui échangeait les valeurs de A et B en passant par une nouvelle variable C qui stockait temporairement B. Ici, on procède différemment sans introduire de nouvelle variable. □

Exercice Soit ABCD un carré. On place E le milieu de [BC] et F un point entre C et D tel que CF=$\frac{1}{4}$CD.

1) Le repère (A,B,D) est-il orthonormé ?
2) Lire les coordonnées des points dans ce repère.
3) Étudier la nature du triangle EFA.

Proof. Corrigé en TD.

1) $(AB) \perp (AD)$ et $AB = AD$ (car ABCD carré), donc (A,B,D) est un repère orthonormé.

2) A(0;0); B(1;0); C(1;1); D(0;1); E(1;$\frac{1}{2}$); F($\frac{3}{4}$;1)

3) On montre que $EF^2 + EA^2 = AF^2$. Par le théorème de Pythagore, on pourra conclure que EFA est rectangle.

Le repère étant orthonormé, on peut appliquer la formule de la distance du cours. On a :

$$\begin{align}
EF &= \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{3}{4} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{5}{16}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{4}
\end{align}$$

$$\begin{align}
EA &= \sqrt{(0 - 1)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{5}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{align}$$

$$\begin{align}
AF &= \sqrt{\left(\frac{3}{4} - 0\right)^2 + \left(1 - 0\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{9}{16} + 1} \\
&= \sqrt{\frac{25}{16}} \\
&= \frac{5}{4}
\end{align}$$

$\square$

Exercice Soit A(3;5); B(0;6); C(4;0); D(1;-2)

1) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

3) Que peut-on dire de plus sur ABCD ?

Proof. Il y a une erreur d'énonce, ABCD n'est pas un parallélogramme. Prouvons le en montrant que les milieux des diagonales AC et BD ne sont pas confondus.
Notons M($x_M; y_M$) le milieu de AC et N($x_N; y_N$) le milieu de BC. Alors la formule des coordonnées du milieux donne :

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$

Les coordonnées des points M et N sont différentes, donc ces points sont distincts. ABCD n'est pas un parallélogramme.

Si l'exo avait été correct (i.e d'autres coordonnées pour les points A,B,C et D), voilà comment on aurait pu procéder :

1) On montre que les milieux de AC et BD sont confondus.

2) On montre que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Par le théorème de Pythagore, on pourra conclure que ABC est rectangle. □

Exercice Soit ABC un triangle équilatéral. Placer les points M, N et P tels que :
a) $\vec{AM} = 3\vec{AC}$; b) $\vec{BN} = 2\vec{AC}$; c)$\vec{MP} = \vec{AB}$.

Proof. Sera corrigé plus tard en cours. □

Exercice On donne les points :

$$A(-5;1) \quad B(-1;3) \quad C(5;1) \quad D(1;-1)$$

a) Placer les points A,B,C et D.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse, si possible de plusieurs manières différentes.

c) Donner les coordonnées du point M d'intersection des diagonales [AC] et [BD].

d) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AM}$, $\vec{AD}$, $\vec{AB}$.

e) Montrer que $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ f) Montrer que $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AM}$.

Proof. Sera corrigé plus tard en cours. □

Exercice (**) On construit une spirale avec $M_0(0;0)$, $M_1(1;0)$; $M_2(1;1)$; $M_3(2;1)$, etc. Quelles sont les coordonnées de M_{2016} ?

Que vaut la distance entre l'origine et M_{2016} ? Calculer les coordonnées du milieu de $[M_0M_{2016}]$.

Proof. Me demander pour des indications ou une correction. □

Exercice (**) Une boule de pétanque et un cochonnet sont placés dans une boîte carré de 27 cm de côté. Mis côte à côte, les deux rentrent tout juste dans la boîte. Le rayon de la boule est 4 fois celui du cochonnet. Trouver les rayons de la boule et du cochonnet.

Proof. Me demander pour des indications ou une correction. □