Fiche d'exos 9 - G1

17 Novembre 2016

1 Vecteurs et parallélogramme

Exercice 1 : On donne A(0;0), B(2;1), C(-2;3), E(-3;-2) et F(1;5).

1) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2) Démontrer l'égalité $\vec{AE} = \vec{FC}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère AECF ?
3) Montrer que [FE] et [BD] on même milieu.

Proof. 1) On cherche D(x;y) tel que $\vec{AB} = \vec{DC}$. Or $\vec{AB} = \binom{2}{1}$ et $\vec{DC} = \binom{-2-x}{3-y}$. Donc

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow 2 = -2 - x \text{ et } 1 = 3 - y$$

donc x=-4 et y=2. Donc D(-4;2). □

Exercice 2 : Dans un repère orthonormal, A(6;2), B(2;3) et C(0;-1).

1) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
3) Calculer les longueurs AD et BC. Que remarque-t-on ? Était-ce prévisible ?

Proof. Fait en DM. □

2 Construction géométriques - calculs de coordonnées

Exercice 3 : Dans un repère, on donne A(-1;3), B(1;1), C(2;2) et D(3;4). Calculer les coordonnées des points E,F et G tels que :
a) $\vec{AE} = 3\vec{AB}$ b) C est le milieu de [AF] c) $\vec{AG} = \frac{3}{2}\vec{AD}$
Démontrer que les points E, F et G sont alignés

Proof. a) $AB = \binom{2}{-2}$. Donc $\vec{AE} = 3\vec{AB} = \binom{6}{-6}$. Si E(x;y), on a aussi $\vec{AE} = \binom{x+1}{y-3}$. Donc x+1=6 et y-3=-6. Donc x=5 et y=-9, ie E(5;-9).

b) C milieu de [AF] se traduit par $\vec{AF} = 2\vec{AC}$. Or $\vec{AC} = \binom{3}{-1}$. Si F(x;y), on aura $\binom{x+1}{y-3} = 2\binom{3}{-1}$.
Donc x+1=6 et y-3=-1. Donc F(5;2).

c) Posons G(x;y). On veut $\vec{AG} = \frac{3}{2}\vec{AD}$, donc $\binom{x+1}{y-3} = \frac{3}{2}\binom{4}{1}$. Donc x=5 et y=4. Donc G(5;4).

2) On montre que $\vec{EF}$ et $\vec{EG}$ sont colinéaires.

On a $\vec{EF} = (^0_1 1)$ et $\vec{EG} = (^0_1 3)$. Donc $\vec{EF} = \frac{13}{11}\vec{EG}$: les deux vecteurs sont colinéaires, donc les points E,F et G sont alignés. □

Exercice 4 : On considère A(2;1), B(6;4), C(5;-3).

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$ puis les longueurs AB, AC et BC. (On essaiera de faire le lien entre les coordonnées d'un vecteur et sa norme).

2) Quelle est la nature du triangle ABC ?

3) Soit I le milieu de [BC]. Calculer les coordonnées du point I. Calculer les longueurs AI, BI et CI. Que remarque-t-on ? Était-ce prévisible ?

Proof. □

Exercice 5 : Soit ABCD un parallélogramme. On définit les points E et F par les relations :

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AD} \qquad \vec{BF} = 3\vec{BC} \tag{1}$$

1) Faire une figure.
2) Donner dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ les coordonnées de tous les points de la figure.
3) Quelle conjoncture peut-on faire concernant les points A,B et F ? Démontrer la conjecture.

3 Relation de Chasles

Exercice 6 : Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Démontrer que :

$$2\vec{AB} + 2\vec{AD} - \vec{AC} = 2\vec{AO} \qquad (2)$$

Exercice 7 : Soient [AC] et [BD] deux diamètres d'un cercle $\mathcal{C}$.
Démontrer que $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC}$.

Exercice 8 : (problème ouvert) ABCD un parallélogramme. Soit M un point quelconque du plan.
La parallèle à (AB) passant par M coupe (AD) et (BC) respectivement en H et F.
La parallèle à (AD) passant par M coupe (AB) et (CD) respectivement en E et G.
Démontrer que $\vec{HG} + \vec{EF} = \vec{AC}$

4 Colinéarité de vecteurs; alignement de points

Exercice 9 : Soit ABCD un carré. On considère les points E et F définis par $\vec{BE} = \frac{4}{5}\vec{BC}$ et $\vec{AF} = 5\vec{AB}$.
1) Faire une figure.
2) a) Déterminer dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$ les coordonnées des points A,B,C,D,E et F.
b) Montrer que les points D,E et F sont alignés.

Exercice 10 : (problème ouvert) ABC triangle quelconque, $r \in \mathbb{R}$. Soient M et N tels que :

$$\vec{AM} = r\vec{AB} - 3\vec{AB}; \quad \vec{AN} = -3\vec{AB} + r\vec{AC}$$

Les droite (BC) et (MN) sont-elles parallèles ?