F4 - Fiche exo 14 - Correction

1 Résolution d'équations

Exercice 1 : Pour résoudre l'équation $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$, un élève propose la solution suivante :

"Avec la calculatrice, j'ai recherché les images de tous les entiers entre -5 et 5 ; j'ai trouvé que 2 et -2 étaient solutions. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \{-2; 2\}$."

1) Commentez cette résolution. Si vous étiez le prof, mettriez vous tous les points ?
2) Montrer que $(x-2)(x+2)(x-6) = x^3-6x^2-4x+24$. Est-il maintenant possible de résoudre complètement l'équation ?
3) Résoudre $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 \geq 0$

Solution: 1) L'élève ne résout pas l'équation, mais donne deux solutions possible. En particulier, il ne montre pas qu'il n'existe pas d'autre solutions.

2)

$$\begin{aligned} (x-2)(x+2)(x-6) &= (x^2-4)(x-6) && (1) \\ &= x^3 - 6x^2 - 4x + 24 && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0 &\iff (x-2)(x+2)(x-6) = 0 && (3) \\ &\iff x-2=0 \quad \text{ou } x+2=0 \quad \text{ou} x-6=0 && (4) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc $S = \{-2; 2; 6\}$.

3)

$$x^3 - 6x^2 - 4x + 24 \geq 0 \iff (x-2)(x+2)(x-6) \geq 0 \qquad (5)$$

On résout l'inéquation grâce au tableau de signe.

x	$-\infty$		-2		2		6		$+\infty$
x-2		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x+2		$-$	0	$+$		$+$			
x-6		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+2)(x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble de solution de l'équation est $S = [-2; 2] \bigcup [6; +\infty[$

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes :

a) $x(x-2) + 5 = x^2$
b) $x^2 = x$
c) $3x^2 + 5 = x^2$
d) $x(x+1) = x(x+2)$
e) $(x-2)(x+3) + (x-2)(x-1) = 0$
f) $(x-1)(x+1) = (x+2)(x+3)$

Solution: a)

$$\begin{aligned} x(x-2) + 5 = x^2 &\iff x^2 - 2x + 5 = x^2 && (6) \\ &\iff -2x + 5 = 0 && (7) \\ &\iff x = \frac{-2}{5} && (8) \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation est $\{-\frac{2}{5}\}$

b)

$$\begin{aligned} x^2 = x &\iff x^2 - x = 0 && (9) \\ &\iff x(x-1) = 0 && (10) \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou } x-1=0 && (11) \end{aligned}$$

Donc les solutions sont $\{-1;0\}$.
c)

$$\begin{aligned} 3x^2+5=x^2 &\iff 2x^2=-5 && (12)\\ &\iff x^2=-\frac{5}{2} && (13)\end{aligned}$$

Comme $-\frac{5}{2}<0$, cette inéquation n'a pas de solutions.
d)

$$\begin{aligned} x(x+1)=x(x+2) &\iff x(x+1)-x(x+2)=0 && (14)\\ &\iff x\Big(x+1-(x+2)\Big)=0 && (15)\\ &\iff x(x+1-x-2)=0 && (16)\\ &\iff x(-1)=0 && (17)\\ &\iff x=0 && (18)\end{aligned}$$

La solution de cette équation est $x=0$.
e)

$$\begin{aligned} (x-2)(x+3)+(x-2)(x-1)=0 &\iff (x-2)\Big(x+3+x-1\Big)=0 && (19)\\ &\iff (x-2)(2x+2)=0 && (20)\\ &\iff x-2=0 \quad \text{ou} 2x+2=0 && (21)\\ &\iff x=2 \quad \text{ou } x=-1 && (22)\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S=\{-1;2\}$.
f)

$$\begin{aligned} (x-1)(x+1)=(x+2)(x+3) &\iff x^2-1=x^2+3x+2x+6 && (23)\\ &\iff 5x=-7 && (24)\\ &\iff x=\frac{-5}{7} && (25)\end{aligned}$$

2 Résolution d'inéquations

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $(x-5)(-2x+6)\geq 0$
b) $(-2x-5)(x+3)<0$
c) $x(x-2)+x>2$
d) $(x-4)^2-7<2$
e) $x^2+x>0$
f) $(x-1)(x+1)+(x+1)^2\leq 0$

Solution: a)

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
x-5		$-$		$-$	0	$+$	
(-2x+6)		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-5)\,(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $S=]-\infty;-3[\bigcup]5;+\infty[$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
-2x-5		$+$		$+$	0	$-$	
x+3		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x-5)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $S = [3;5]$

c)

$$x(x-2)+x>2 \iff x(x-2)+x-2>0 \quad (26)$$
$$\iff x^2-2x+x-2>0 \quad (27)$$
$$\iff x^2-x-2>0 \quad (28)$$

Ici il faudrait factoriser pour pouvoir résoudre avec un tableau de signe. Mais la factorisation n'est pas triviale (méthode "compléter le carré", on a vu un exemple en cours mais ça prenait 3 tableaux et n'est pas exigible au niveau seconde). Donc on peut proposer une méthode graphique pour résoudre l'équation (on trace la courbe de $f(x) = x^2-x-2$ et on lit graphiquement les solutions).

d)

$$(x-4)^2-7<2 \iff (x-4)^2-7-2<0 \quad (29)$$
$$\iff (x-4)^2-9<0 \quad (30)$$
$$\iff (x-4-3)(x-4+3)<0 \quad (31)$$
$$\iff (x-7)(x-1)<0 \quad (32)$$

On conclut avec un tableau de signe.

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
x-7		$-$		$-$	0	$+$	
x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-7)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $S =]1;7[$.

e) On commence par factoriser ; ici le facteur commun est x.

$$x^2+x>0 \iff x(x+1)>0 \quad (33)$$

On conclut avec un tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
x+1		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $S =]-\infty;-1[\bigcup]0;+\infty[$.

e) On commence par factoriser ; ici le facteur commun est $x+1$.

$$(x-1)(x+1)+(x+1)^2 \leq 0 \iff (x+1)\big(x-1+x+1\big) \leq 0 \quad (34)$$
$$\iff (x+1)(2x) \leq 0 \quad (35)$$
$$\iff (x+1)x \leq 0 \quad (36)$$

(On a divisé par 2 pour obtenir la dernière ligne ; on ne change pas le signe de l'inéquation car 2 est un nombre strictement positif).

On est ramené au même tableau de signe de la question précédente. L'ensemble des solutions est donc $S = [-1;0]$.

3 Mise en situation

Exercice 4 : Un élève a obtenu 7 et 8 aux deux premiers devoir de maths. Quelle note doit-il obtenir au troisième DS pour avoir plus de la moyenne si les DS ont le même coefficient ? Peut-il avoir plus de 13 de moyenne ?

Mêmes questions si le troisième DS a un coefficient 2.

Solution: Soit x la note de l'élève au 3ème DS. Sa moyenne vaut $\bar{m} = \frac{7+8+x}{3} = \frac{15+x}{3} = 5 + \frac{x}{3}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \bar{m} \geq 10 &\iff 5 + \frac{x}{3} \geq 10 && (37) \\ &\iff \frac{x}{3} \geq 5 && (38) \\ &\iff x \geq 15 && (39) \end{aligned}$$

Il va devoir avoir plus de 15 au troisième DS s'il veut obtenir la moyenne.

S'il veut obtenir plus de 13, il lui faut une note supérieure à 20 (résolution de $\bar{m} \geq 13$ laissée au lecteur). Si les DS sont notés sur 20, ce n'est pas possible.

DS coeff 2 Si le troisième DS est coefficient 2, alors la moyenne devient $\bar{m} = \frac{7+8+2x}{4}$ (on fait attention de bien diviser par 4, et non pas 3). On résout le problème comme précédemment.

Exercice 5 : On partage 290€ entre trois personnes. La première touche 30€ de plus que la deuxième, mais 50€ de moins que la troisième. Combien va toucher la première personne ?

Solution: On note x_1 la somme gagnée par la première personne, x_2 celle gagnée par la deuxième personne et x_3 celle par la troisième personne. On cherche x_1.

On a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 290 \qquad (40)$$

De plus, $x_1 = x_2 + 30$ (*la première touche 30€ de plus que la deuxième*) et $x_1 = x_3 - 50$ (*50€ de moins que la troisième*).

Donc l'équation 40 devient :

$$x_1 + (x_1 - 30) + (x_1 + 50) = 290 \qquad (41)$$

Cela se ramène à $3x_1 = 270$, donc $x_1 = 90$. La première personne touche 90€.

Exercice 6 : Le prix de quatre chemises et cinq cravates est de 340€. Sachant que le prix d'une chemise est le triple du prix d'une cravate, déterminer le prix d'une chemise et celui d'une cravate.

Solution: Soit x le prix d'une chemise et y le prix d'une cravate. On a deux équations :

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 340 && (42) \\ x &= 3y && (43) \end{aligned}$$

Donc en remplaçant x par $3y$ dans la première équation, on arrive à :

$$4 \times 3y + 5y = 340 \qquad (44)$$

Cela se résout en y=20. Une cravate coute donc 20€. Une chemise coute 3 fois le prix d'une cravate, donc 60€.

Exercice 7 : (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à savoir si les fractions $\frac{43}{3n+1}$ sont irréductibles pour tout n ou non.

1) Vérifier que pour n=1 ; n=2 ;. . . ; n=6 ces fractions sont irréductibles.
2) Que peut on conjecturer ?
3) Prendre n=14. Qu'advient-il de la conjecture ?

Solution: 1) Effectivement, elles sont irréductibles (le vérifier).

2) On fait l'hypothèse que pour tout entier naturel n, les fractions $\frac{43}{3n+1}$ sont irréductibles

3) Pour n=14, la fraction devient $\frac{43}{3\times14+1} = \frac{43}{43}$. Ce n'est pas une fraction irréductible. La conjecture (l'hypothèse) était donc fausse.

Moralité de l'exo : ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour n=1, n=2, n=3, . . . , n=6 qu'elle sera vraie pour tout entier naturel !