F6 - Fonction carré

1 Fonction carré

1.1 Définition, propriétés

Définition 1. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a tout nombre réel x associe son carré est appelée la fonction carré. On note $f : x \mapsto x^2$.*

Proposition 1.1. *Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et passe par l'origine du repère. Elle est appelée parabole de centre O.*

Faire les figures.

1.2 Variations

Proposition 1.2. *La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ est croissante sur $[0; +\infty[$.*

Proof. Prenons deux nombres réels a et b tels que $a \leq b$. On a $f(x) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Or $a \leq b$, donc $a - b \leq 0$. Le signe de $f(a) - f(b)$ est donc le signe opposé de celui de a+b.

- Si a et b sont tous deux positifs, alors $a + b$ est aussi positif, donc $f(a) - f(b)$ est négatif.
- Si a et b sont tous deux négatifs, alors $a + b$ est aussi négatif, donc $f(a) - f(b)$ est positif.

□

1.3 Équations, inéquations

Proposition 1.3. *Équation $x^2 = k$, avec k réel*

- Si $k < 0$, comme un carré est positif, l'équation $x^2 = k$ n'admet pas de solutions.

- Si k=0, l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = O$

- Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ admet deux solutions, qui sont $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$

L'équations $x^2 = k$ admet 0, 1 ou 2 solutions suivant le signe de k.

Exercice 1 : Résoudre $(x - 2)^2 = 25$

Proposition 1.4. *Résoudre une inéquation $x^2 \leq k$ ou $x^2 \geq k$ avec k réel revient à étudier le signe de $x^2 - k$.*

$\boxed{k < 0}$	$\boxed{k > 0}$
L'inéquation $x^2 \leq k$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$	• *L'inéquation $x^2 \leq k$ a pour ensemble solution :* $S = \left[-\sqrt{k}; \sqrt{k}\right]$
L'inéquation $x^2 \geq k$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$	• *L'inéquation $x^2 \geq k$ a pour ensemble solution :* $S = \left]-\infty; -\sqrt{k}\right] \cup \left[\sqrt{k}; +\infty\right[$

2 Polynômes du second degré

2.1 Définition et représentation graphique

Définition 2. *Une fonction polynomiale du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c trois réels et a non nul.*

Exemple $f(x) = x^2 + 3x + \sqrt{2}$, $g(x) = \pi x^2$ sont des fonction polynomiales du second degré, mais $h(x) = \frac{2x^2+3x}{x^2+1}$ n'en n'est pas une.

Remarque : Une fonction affine n'est pas une fonction polynômiale du second degré (c'est une fonction polynomiale du premier degré).

Proposition 2.1. *Soit f une fonction polynomiale du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$*

- *Si $a > 0$, f est d'abord décroissante, puis croissante.*
- *Si $a < 0$, f est d'abord croissante, puis décroissante*

Proof. Admis ici. □

Exercice 2 : Dresser les tableaux de variation d'une fonction polynomiale de degré 2 dans les cas $a > 0$ et $a < 0$.

Exemple $f : x \mapsto -x^2 + 3x + 8$ est d'abord croissante, puis décroissante.
$f : x \mapsto 2x^2 + 5x - 9$ est d'abord décroissante, puis croissante.

2.2 Représentation graphique

Proposition 2.2.

1. *Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f est une parabole. Elle admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.*
2. *Le minimum (si $a > 0$) ou maximum (si $a < 0$) de f est atteint en $-\frac{b}{2a}$*
3. *Le point où le maximum (ou minimum) est atteint a pour coordonnées $(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$. On l'appelle le sommet de la parabole.*
4. *La parabole a pour axe de symétrie la droite $x = -\frac{b}{2a}$*

Exemple Faire un graphique

Exercice 3 : Tracer la courbe représentative et dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 11 \quad g(x) = -x^2 + 3x + 1$$

2.3 Différentes formes d'une expression polynomiale du second degré

Proposition 2.3. *Toute fonction polynomiale f de degré 2 définie sur $\Re$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :*

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Sous cette forme, on voit que f admet $f(\alpha) = \beta$ comme maximum (si $a < 0$) ou un minimum (si $a > 0$), atteint en α.

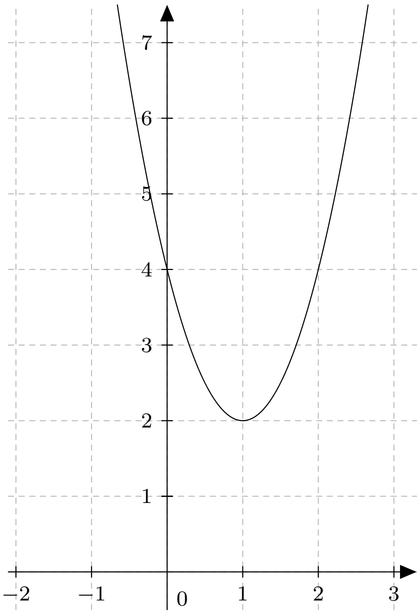
Proof. Un peu technique, sera fait en première. □

Exercice 4 : Soit $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 1$.

1. Montrer que $f(x) = -0,5(x-2)^2 + 3$.
2. (a) Montrer que $f(x) \leq 3$
   (b) Trouver le maximum de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.

2.4 Application : Déterminer l'équation d'une fonction polynomiale à partir de sa courbe représentative. (*)

Exercice 5 : On donne la courbe représentative de la fonction polynomiale de degré 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer a, b et c.



Méthode Tout d'abord, on sait que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Le sommet de la parabole est situé en $S(1;2)$. Donc $\alpha = -\frac{b}{a} = 1$, et $\beta = f(1) = 2$.

Donc $f(x) = a(x-1)^2 + 2$.

On développe cette expression. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 - 2x + 1) + 2 && (1) \\ &= ax^2 - 2ax + a + 2 && (2) \\ &= ax^2 + bx + x && (3) \end{aligned}$$

Donc $b = -2a$ et $c = a + 2$

Détermination de a, b et c Tout d'abord, on a $f(0) = 4$ donc $c = 4$. De plus, avec l'équation précédente, on a vu que $c = a + 2$, donc $a = 2$. Enfin, $b = -2a$, donc $b = -4$.

Finalement, il vient $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$