F5 - Fonctions affines

1 Fonctions linéaires, fonctions affine

1.1 Définition

Définition 1. *On appelle fonction affine toute fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la forme $f : x \mapsto ax + b$, où a et b sont deux coefficient réel constant.*

Dans le cas où $b = 0$, on parle aussi de fonction linéaire.

Exemple Lesquelles de ces fonctions sont des fonctions affines ? Linéaires ?

$$f(x) = \pi x+\sqrt{2} \quad g(x) = x^2+7x+19 \quad h(x) = x\sqrt{x}+3x+2 \quad i(x) = x^\pi+2 \quad j(x) = \left(\sqrt{\pi+\sqrt{2}}\right)x \quad k(x) = 3(x-2)-2(x-1)$$

1.2 Propriétés; coefficient directeur

Proposition 1.1. *La courbe représentative d'une fonction affine est une droite. Cette droite passe par l'origine si et seulement si $b = 0$ (i.e si c'est une fonction linéaire).*

Enfin, l'image de 0 par f est $f(0) = b$, donc la courbe passe par le point de coordonnées (0;b) : autrement dit, elle coupe l'axe des ordonnées (axe y) au point d'ordonnée 0.

Proposition 1.2. *Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Quels que soient les nombres distincts x_1 et x_2, le nombre $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est constant, égal à a.*

Cette propriété caractérise les fonctions affines.

Proof. $f(x_2) = ax_2 + b$ et $f(x_1) = ax_1 + b$, donc $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$. □

1.3 Représentation graphique

Définition 2. *a est appelé le coefficient directeur (ou pente) de la droite qui représente f. On peut le déterminer graphiquement (faire sur un exemple).*

Définition 3. *b est l'image de 0 par f : on l'appelle l'ordonnée à l'origine.*

Exemple Tracer $f : x \mapsto 2x + 1$; déterminer une méthode pour trouver le coefficient directeur de f graphiquement.

Exercice 1 : Tracer rapidement :

$$f(x) = 2x - 1 \quad g(x) = -x - 1 \quad h(x) = -3x \quad l(x) = 3x$$

Proposition 1.3. *Graphiques de $f : x \mapsto ax + b$ selon signe de a et si $b = 0$ ou $b \neq 0$.*

1.4 Variations

Proposition 1.4. *Pour les variations de $f : x \mapsto ax + b$, on distingue trois cas :*

- *$a < 0$: f décroissante*
- *$a = 0$: f constante*
- *$a > 0$: f croissante*

Exercice 2 : Tracer le tableaux de variations de $f : x \mapsto ax + b$ pour chacun des trois cas.

1.5 Étude du signe

Problématique : on cherche à savoir le signe de f, c'est à dire résoudre $f(x) > 0$.

Exercice 3 : Étudier le signe de $f : x \mapsto x + 1$, $g : x \mapsto -x + 1$ et $h : x \mapsto 0x + 1$.

A partir de ces exemples, pour traiter le cas général : $x \mapsto ax+b$, il semble que l'on doive séparer les cas $a > 0$ et $a < 0$.

Cas $a > 0$

1. $ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$ (car $a \neq 0$).
2. $ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$ (car $a > 0$)
3. $ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x < -\frac{b}{a}$ (car $a > 0$)

Cas $a < 0$

1. $ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$ (car $a \neq 0$).
2. $ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$ (car $a < 0$)
3. $ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x > -\frac{b}{a}$ (car $a < 0$)

Tracer le tableau de signe (cas $a > 0$ et $a < 0$).